13/11/2018

ΘΕΩΡΗΜΑ:

(B) (α) Αν $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στο E το σύνολο πηλίκο $E/\sim$ είναι μια διαμέριση του E.

(β) Αν τ είναι μια διαμέριση του E τότε το E μπορεί να εφοδιαστεί με μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ώστε $E/\sim = \tau$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

(B) (α): $\forall \alpha \in E$ $\alpha \in [\alpha]$ άρα $[\alpha] \neq \emptyset$

$\cup(E/\sim) = E$

[Εφόσον $[\alpha] \subseteq E$ $\forall \alpha \in E$ $\cup(E/\sim) \subseteq E$

Αντίστροφα, αν $\alpha \in E$ τότε $\alpha \in [\alpha]$

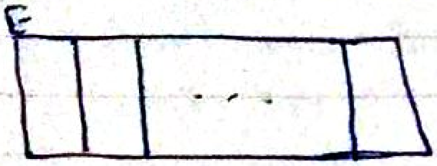
με $[\alpha] \in E/\sim$ άρα $\alpha \in \cup(E/\sim)$]

Επίσης αν $[\alpha], [b] \in E/\sim$ με $[\alpha] \neq [b]$ τότε $\alpha \nsim b$

άρα $[\alpha] \cap [b] = \emptyset$

Επομένως $E/\sim$ είναι μια διαμέριση του E.

(b): Έστω C μια διαμέριση του E.



Ορίζουμε τη σχέση $\sim$ στο E ως εξής: $x\sim y \Leftrightarrow \exists X\in C$ ώστε $x,y\in X$

Τότε $\sim$ αυτοπαθής: ($\forall x\in E$ υπάρχει $X\in C$ ώστε $x\in X$ άρα $x\sim x$)

$\sim$ συμμετρική: Αν $x\sim y$ τότε υπάρχει $X\in C$ ώστε $x,y\in X$
$\Rightarrow \exists X\in C$, $y,x\in X \Rightarrow y\sim x$

$\sim$ μεταβατική: Έστω $x,y,z\in E$ με $x\sim y$, $y\sim z$
$x\sim y \Rightarrow \exists A\in C$ ώστε $x,y\in A$
$y\sim z \Rightarrow \exists B\in C$ ώστε $y,z\in B$.
Εφόσον $y\in A\cap B$ έχουμε $A\cap B\neq \emptyset$
Άρα εφόσον C διαμέριση $A=B$
Έτσι $x,z\in A$: άρα $x\sim z$
Άρα η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.
Άρα η $E/\sim$ είναι μία διαμέριση του E.
Έτσι οι C, $E/\sim$ είναι δύο διαμερίσεις του E.
Για να δείξουμε ότι $C=E/\sim$ αρκεί να δ.ο. $C\subseteq E/\sim$.

Έστω $X \in C$

Τότε $X \neq \emptyset$ άρα υπάρχει $\alpha \in X$. Δείχνουμε ότι $X = [\alpha]$ $\forall x \in X$
εφόσον $x \in X$, $\alpha \in X$ έχουμε $x \sim \alpha$ άρα $x \in [\alpha]$.
Συνεπώς $X \subseteq [\alpha]$

Αντίστροφα, αν $x \in [\alpha]$ τότε $x \sim \alpha$ και εφόσον $\alpha \in X$ έχουμε $x \in X$. Έτσι $[\alpha] \subseteq X$. Άρα $X = [\alpha]$

Άρα $X \in E/\sim$

Αποδείξαμε ότι $C \subseteq E/\sim$ επομένως $C = E/\sim$

Παραδείγματα:

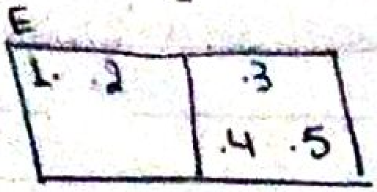
Έστω $p \in \mathbb{N}$ $p \geq 2$

Ορίζουμε στο $\mathbb{Z}$ τη σχέση $\sim$ ως εξής: $x \sim y \iff$ Το p διαιρεί το $x-y$ ($\exists k \in \mathbb{Z}$, $x-y = kp$).

Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Z}$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι τα εξής σύνολα:

$$\mathbb{Z}/\sim = \{\{\dots -2p, -p, 0, p, 2p, 3p, \dots\}$$
$$\{\dots -2p+1, -p+1, 1, p+1, 2p+1, 3p+1, \dots\}$$
$$\vdots$$
$$\{\dots -p-1, -1, (p-1), p+(p+1), 2p+(p+1), \dots\}\}$$

$E = \{1,2,3,4,5\}$
$C = \{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$
Η σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο E που ορίζει η διαμέριση C είναι η εξής



$\sim = \{(1,1),(2,2),(1,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),$
$(4,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$

Μερική Διάταξη (ή απλά διάταξη):
Ορισμός: Μια σχέση $\sigma \subseteq E \times E$ λέγεται σχέση μερικής διάταξης ή μερική διάταξη ή διάταξη αν είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική, και μεταβατική.

Συνήθως, χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\preccurlyeq$ ή $\leq$ για να συμβολίσουμε μια μερική διάταξη.

Αν $\leq$ μια μερική διάταξη στο E. Το $(E, \leq)$ λέγεται μερικά διατεταγμένο σύνολο. Έστω $(E, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και $a, b \in E$. Αν $a \leq b$ θα λέμε ότι το a προηγείται του b. (επίσης γράφουμε και $b \geq a$)

Παρατήρηση

Αν $(E, \leq)$ είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο τότε $\leq^{-1} = \geq$.
(Δηλαδή $\alpha \leq b \Leftrightarrow b \geq \alpha$).
η $\geq$ είναι επίσης σχέση διάταξης στο E.
Η σχέση $<$ στο E που ορίζεται ως εξής $\alpha < b \Leftrightarrow [\alpha \leq b$ και $\alpha \neq b]$
λέγεται γνήσια διάταξη στο E.
Αν $\alpha < b$ θα λέμε ότι το α προηγείται γνήσια του b
$[< \; = \; \leq \setminus \Delta_E]$

Ολική Διάταξη:

Ορισμός: Αν E ένα σύνολο και $\leq$ μια μερική διάταξη στο E
η $\leq$ θα λέγεται ολική διάταξη ή γραμμική διάταξη αν $\forall x, y \in E$
ισχύει $x \leq y$ ή $y \leq x$.

Παραδείγματα:

(α) Στο $\mathbb{R}$ η συνήθης σχέση $\leq$ είναι ολική διάταξη
(ομοίως στο $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$)

(β) Αν Ω τυχόν σύνολο και $\mathcal{P}(\Omega)$ το δυναμοσύνολο του Ω.
Η $\subseteq$ είναι μια μερική διάταξη στο $\mathcal{P}(\Omega)$.
$\subseteq$ αυτοπαθής $(A \subseteq A \; \forall A \in \mathcal{P}(\Omega))$
$\subseteq$ αντισυμμετρική (Αν $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ με $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A = B$)
$\subseteq$ μεταβατική (Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \subseteq \Gamma$)

Αν το Ω έχει δύο τουλάχιστον στοιχεία τότε η $\subseteq$ δεν είναι
ολική διάταξη.
Αν $\alpha, b \in \Omega$ με $\alpha \neq b$ τότε $\{\alpha\}, \{b\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ ενώ δεν ισχύει
$\{\alpha\} \subseteq \{b\}$ ούτε $\{b\} \subseteq \{\alpha\}$.
Αν η $\subseteq$ δεν είναι ολική διάταξη.

Αν $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$$\begin{tikzcd}
 & \emptyset \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\{\alpha\} \arrow[d] \arrow[dr] & \{\beta\} \arrow[dl] \arrow[dr] & \{\gamma\} \arrow[dl] \arrow[d] \\
\{\alpha,\beta\} \arrow[dr] & \{\alpha,\gamma\} \arrow[d] & \{\beta,\gamma\} \arrow[dl] \\
 & \{\alpha,\beta,\gamma\} &
\end{tikzcd}$$

(γ) Στο σύνολο $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$. Ορίζουμε τη σχέση
$\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ το x διαιρεί το $y\}$
(δηλ. $x\sigma y \Leftrightarrow \exists \kappa \in \mathbb{N} \ \ y = \kappa x$)

σ αυτοπαθής ($\forall x \in \mathbb{N} \quad x = \underset{\mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{1}} \cdot x$ άρα $x\sigma x$)

σ μεταβατική (αν $x, y, z \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{με } x\sigma y \\ \quad\ \ y\sigma z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \exists \kappa\in\mathbb{N} \ \ y = \kappa x \\ \exists \lambda \in \mathbb{N} \ . \ z = \lambda y \end{array}\right\}$$

άρα $z = \underset{\mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{\underline{\lambda\kappa}}} \cdot x$ άρα $x\sigma z$

Αν $x, y \in \mathbb{N}$ ώστε $x\sigma y$ και $y\sigma x$

τότε $\left.\begin{array}{l} \exists \kappa\in\mathbb{N} \ \ y = \kappa x \\ \exists \lambda\in\mathbb{N} \ \ x = \lambda y \end{array}\right\} \Rightarrow x = \kappa\lambda x \xRightarrow{x \neq 0} \kappa\lambda = 1 \rightarrow \kappa = 1$ κ' $\lambda = 1$, διότι $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

Άρα $\boxed{x = y}$.

Επομένως η σ είναι σχέση μερικής διάταξης.
Η σ δεν είναι γραμμική διάταξη αφού $2 \not\sigma 3$ και $3 \not\sigma 2$.
(ολική)

Φραγμένα Σύνολα: Έστω $(E, \leq)$ μερικά διατεταγμένο σύνολο και A είναι μη κενό υποσύνολο του E.
(i) Ένα $a \in E$ λέγεται άνω φράγμα του A αν $x \leq a$ $\forall x \in A$.
(ii) Ένα $b \in E$ λέγεται κάτω φράγμα του A αν $b \leq x$ $\forall x \in A$.
(iii) Το A λέγεται άνω φραγμένο αν έχει ένα (τουλάχιστον) άνω φράγμα
(iv) Το A λέγεται κάτω φραγμένο αν έχει ένα (τουλάχιστον) κάτω φράγμα
(v) Το A λέγεται φραγμένο αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Παρατήρηση: Ένα άνω (κάτω) φράγμα ενός υποσυνόλου A ενός διατεταγμένου συνόλου $(E, \leq)$ μπορεί είτε να ανήκει ή να μην ανήκει στο A.

Πρόταση: Έστω $(E, \leq)$ διατεταγμένο σύνολο και $A \subseteq E$. Τότε υπάρχει το πολύ ένα άνω (αντίστοιχα κάτω) φράγμα του A που να περιέχεται στο A.

Απόδειξη: Έστω a άνω φράγμα του A με $a \in A$ και υποθέτουμε ότι b είναι επίσης άνω φράγμα του A με $b \in A$. Εφόσον το a είναι άνω φράγμα του A και $b \in A$ προκύπτει ότι $b \leq a$. Εφόσον το b είναι άνω φράγμα του A και $a \in A$ ισχύει $a \leq b$
Εφόσον η $\leq$ είναι αντισυμμετρική προκύπτει $a = b$.
→ Ομοίως για τα κάτω φράγματα

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $(E, \leq)$ μερ. διατ. σύνολο $A \subseteq E$.

(α) Ένα στοιχείο $a \in A$ ώστε το a να είναι άνω φράγμα του A λέγεται μέγιστο στοιχείο του A.
(Από την προηγούμενη πρόταση αν υπάρχει, είναι μοναδικό)
Στην περίπτωση αυτή συμβολίζουμε $a = \max A$.

(β) Ένα $b \in A$ ώστε το b να είναι κάτω φράγμα του A λέγεται ελάχιστο του A.
(Αν υπάρχει, είναι μοναδικό)
Συμβολίζεται $b = \min A$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $(E, \leq)$ μερικά διατεταγμένο σύνολο. $A \subseteq E$ και $a, b \in E$.

(i) Το a λέγεται ελάχιστο άνω φράγμα (ή άνω πέρας) ή supremum του A

→ $x \leq a$ για κάθε $x \in A$ (δηλ. a είναι άνω φράγμα του A)

→ αν $k \in E$ είναι άνω φράγμα του A (δηλ. $x \leq k$ $\forall x \in A$) τότε $a \leq k$

Το supremum του A (αν υπάρχει) είναι μοναδικό.

Συμβολίζεται $a = \sup A$.

(ii) Το b λέγεται μέγιστο κάτω φράγμα (ή κάτω πέρας) ή infimum του A

→ $b \leq x$ $\forall x \in A$ (δηλ. το b είναι κάτω φράγμα του A)

→ Αν $\lambda \in E$ είναι κάτω φράγμα του A (δηλ. $\lambda \leq x$ $\forall x \in A$) τότε $\lambda \leq b$

Το infimum του A (αν υπάρχει) είναι μοναδικό.

Συμβολίζεται $b = \inf A$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

(α) Αν το A έχει μέγιστο στοιχείο το α τότε $α = \sup A$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Το α είναι άνω φράγμα του A (εξ' ορισμού). Αν $x \in E$ είναι ένα άνω φράγμα του A τότε εφόσον $α \in A$ έχουμε $α \leq x$.

Άρα $α = \sup A$

(β) Αν το A έχει ελάχιστο στοιχείο το b τότε $b = \inf A$.

Αποδ. Όμοια.

(γ) Αν το A έχει supremum και ισχύει $\sup A \in A$ τότε το A έχει μέγιστο στοιχείο το $\sup A$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Εφόσον $\sup A \in A$ και $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A (από τον ορισμό του supremum) από τον ορισμό $\sup A = \max A$.

(δ) Αν το A έχει infimum και $\inf A \in A$ τότε το $\inf A$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του A (δηλ. $\min A = \inf A$)

(ε) Αν το A έχει supremum και $\sup A \notin A$. Τότε το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

(στ) Αν το A έχει infimum και $\inf A \notin A$ τότε το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $(E, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο $A \subseteq E$, $a \in A$, $b \in A$.
(i) Το a λέγεται μεγιστοτικό ή μεγιστικό (maximal) αν δεν υπάρχει $x \in A$ με $a < x$.

(ii) Το b λέγεται ελαχιστοτικό ή ελαχιστικό (minimal) αν δεν υπάρχει $x \in A$ με $x < b$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

(α) Για $a \in A$
maximal του $A \Leftrightarrow [(x \in A$ και $x \geq a) \Rightarrow x = a]$

(β) Για $b \in A$
b minimal του $A \Leftrightarrow [(x \in A$ και $x \leq b) \Rightarrow x = b]$

(γ) Ένα σύνολο A μπορεί να μην έχει ή να έχει ένα ακριβώς max, min, sup, inf.
Αντίθετα (όπως θα δούμε) μπορεί να έχει περισσότερα από ένα maximal ή minimal.

Παραδείγματα:

(α) Έστω $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών με τη συνήθη διάταξη $\leq$

Θεωρούμε το σύνολο $A=\{x\in\mathbb{R} \quad x>0\}$

→ Το A είναι κάτω φραγμένο [Το 0 και οποιοσδήποτε αρνητικοί αριθμοί είναι κάτω φραγμένη του A)

→ Το 0 είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A (δηλ. $0=\inf A$)

Πράγματι, → Το 0 είναι κάτω φράγμα του A.

→ Έστω $k\in\mathbb{R}$ ένα τυχαίο κάτω φράγμα του A και θα δείξουμε ότι $k\leq 0$.

Εφόσον η $\leq$ είναι γραμμ. διάταξη αν αυτό δεν συμβαίνει τότε $k>0$. Τότε $\frac{k}{2}>0$ (δηλ. $\frac{k}{2}\in A$ και $k>\frac{k}{2}$ άτοπο (διότι το k είναι κάτω φράγμα του A)

Επομένως, $0=\inf(A)$.

$\inf A=0\notin A$ άρα το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο

Το A δεν είναι άνω φραγμένο (άρα δεν έχει μέγιστο ή supremum).

Επίσης αν $B=\{x\in\mathbb{R} \quad x<0\}$.

Όμοιως αποδεικνύεται ότι $\sup B=0$

Το B δεν έχει μέγιστο στοιχείο

$\Gamma=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\}$

Τότε $\max\Gamma=1$ άρα $\sup\Gamma=1$

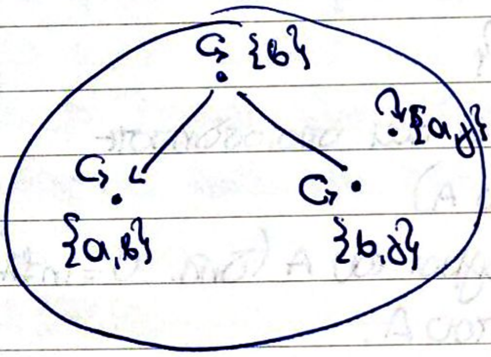
$\inf\Gamma=0\notin\Gamma$

Άρα το Γ δεν έχει ελάχιστο.

(β) Έστω $\Omega\neq\emptyset$ $(\mathcal{P}(\Omega),\subseteq)$

Το $\mathcal{P}(\Omega)$ έχει ελάχιστο το $\emptyset$ και μέγιστο στοιχείο το Ω.

(γ) $E = \{\{b\}, \{a,b\}, \{a,\gamma\}, \{b,\gamma\}\}$ διατεταγμένο με τη σχέση $\subseteq$.



→ Δεν έχει μέγιστο στοιχείο

→ Δεν έχει ελάχιστο στοιχείο

→ Τα $\{a,b\}$, $\{b,\gamma\}$, $\{a,\gamma\}$ είναι maximal (ψευδομέγιστα ή μεγιστικά)

→ Τα $\{b\}$, $\{a,\gamma\}$ είναι minimal (ψευδοελάχιστα ή ελαχιστικά)